11. cvičení - teorie

Definice. Nechť f je funcke a $a \in \mathbb{R}$ a f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(x)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorův polynom funkce f v bodě a řádu n.**

Lemma 9.1. Nechť $n \in \mathbb{N}, Q$ je polynom stupně $\leq n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Věta 9.2. Nechť $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Věta 9.3 (o jednoznačnosti)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je **v bodě a malé o od g**, píšeme $f(x) = o(g(x)), x \to a$, jestliže platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Lemma 9.4. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \to a$ a $f_2(x) = o(g(x)), x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \to a$.

(ii) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))_x \to a$ a $f_2(x) = o(g_2(x)), x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)), x \to a$.

(iii) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g(x)f_2(x)), x \to a$.

(iv) Jestliže $f(x) = o(g_1(x)), x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o(g_2(x)), x \to a$.

(v) Jestliže $f(x) = o(g(x)), x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o(g(x)), x \to a$.

(vi) Jestliže $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \leq n$ a $f(x) = o((x-a)^n), x \to a$, potom $f(x) = o((x-a)^m), x \to a$.

Věta 9.5. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, f(y) = o(g(y)), y \to b, \lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))), x \to a$.

Věta 9.7 (známé rozvoje)**.** Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0}(x) = T_{2k+1}^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+y),0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k$,
- $T_k^{(1+y)^\alpha,0}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{x^k}x^k$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$.